

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тамбовский государственный университет имени Г.Р.Державина»

«Утверждаю»

Директор института математики,
физики и информационных
технологий

_____ Королева Н.Л.

«28» марта 2023 г.

ПРОГРАММА

**ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

ДЛЯ ПОСТУПЛЕНИЯ В АСПИРАНТУРУ

Научная специальность:

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Уровень высшего образования

подготовка кадров высшей квалификации
по программам подготовки научных и
научно-педагогических кадров в аспирантуре

Тамбов 2023

Программа вступительного испытания разработана профессорско-преподавательским составом кафедры функционального анализа, обсуждена и утверждена на заседании Ученого совета Института математики, физики и информационных технологий Тамбовского государственного университета имени Г.Р.Державина 28 марта 2023 г., протокол № 2.

1. Цели и задачи вступительного испытания

Цель вступительного испытания для поступающих – оценка базовых знаний соискателя с точки зрения их достаточности для научной работы по специальности «Дифференциальные уравнения и математическая физика» и выявление наличия у него мотивации и способностей к аналитической, научной работе.

Основные задачи испытания:

- проверка базовых знаний у поступающего в аспирантуру по данному профилю;
- оценить у поступающего в аспирантуру его потенциальные возможности, обеспечивающие усвоение и развитие компетенций исследователя, преподавателя-исследователя;
- выяснить мотивы поступления и определить область научно-практических и личных интересов поступающего.

2. Требования к знаниям и умениям поступающего:

- быть эрудированным, обладать высокой культурой математического мышления;
- знать теоретические основы функционального и математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, алгебры и геометрии;
- иметь представление об основных современных тенденциях и направлениях развития мировой и отечественной математики;
- владеть методикой и технологией создания и использования математических моделей в различных сферах жизнедеятельности общества: естественнонаучных, экономических, управленческих, социальных, информационных и др.;
- уметь обоснованно выбирать и эффективно использовать на практике образовательные и информационные технологии;
- владеть навыками самостоятельной научно-исследовательской и научно-педагогической деятельности, требующими глубоких математических знаний;
- уметь определять проблему, формулировать гипотезы и решать задачи, возникающие в ходе научно-исследовательской и педагогической деятельности и требующие углубленных математических знаний;
- уметь формировать план исследования, выбирать необходимые методы исследования, модифицировать существующие и разрабатывать новые методы исходя из задач конкретного исследования;
- уметь обрабатывать анализировать и осмысливать полученные результаты;
- владеть навыками ведения библиографической работы с привлечением современных информационных технологий;
- уметь представлять итоги проделанной работы в виде отчетов, рефератов, статей, оформленных в соответствии с имеющимися требованиями, с

привлечением современных средств редактирования и печати.

3. Содержание программы вступительного испытания (аннотации тем)

Тема 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Понятие обыкновенного дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Интегральные кривые. Интегрируемые типы дифференциальных уравнений. Существование и единственность решения дифференциальных уравнений. Особые решения. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Линейная зависимость функций. Определитель Вронского. Линейные однородные и неоднородные уравнения второго порядка. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Нормальная форма дифференциальных уравнений. Системы линейных дифференциальных уравнений. Линейные однородные системы. Фундаментальные системы решений. Неоднородные системы линейных уравнений. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тема 2. Уравнения математической физики

Задача Коши и начально-краевые задачи для волнового уравнения и методы их решения. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.). Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.). Задача Коши и начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника и др.). Нелинейные гиперболические уравнения. Основные свойства.

Тема 3. Функциональный анализ и теория функциональных пространств

Элементы теории множеств. Отображения. Разбиение на классы. Эквивалентность множеств. Понятие мощности. Задача построения меры. Определение меры Лебега. Внешняя и внутренняя мера ограниченного множества. Определение и свойства измеримых функций. Сходимости по мере. Интеграл Лебега. Определение, свойства. Суммируемые функции. Метрические пространства. Непрерывность отображения в метрических пространствах. Сходимость в метрических пространствах. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах. Полные метрические пространства. Теорема Бэра. Принцип сжимающих отображений. Теорема

Банаха и ее применение. Компактность метрических пространств. Теорема Арцела. Линейно нормированные пространства. Линейные операторы и функционалы. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Теорема Хана-Банаха. Евклидовы пространства. Ортогональные системы. Ортогонализация. Ряд Фурье в ортогональной системе. Сходимость ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Полные и замкнутые ортогональные системы. Равенство Парсеваля. Гильбертово пространство. Изоморфизм счетномерных и гильбертовых пространств. Подпространства. Ортогональные дополнения. Проекция векторов на пространство. Прямая сумма. Сопряженные пространства. Общий вид линейных функционалов в гильбертовом пространстве. Сопряженные и самосопряженные операторы. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора.

4. Вопросы к вступительному испытанию:

1. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Интегральные кривые.
2. Интегрируемые типы дифференциальных уравнений.
3. Существование и единственность решения дифференциальных уравнений. Особые решения.
4. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Линейная зависимость функций. Определитель Вронского.
5. Линейные однородные и неоднородные уравнения второго порядка.
6. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.
7. Нормальная форма дифференциальных уравнений. Системы линейных дифференциальных уравнений.
8. Линейные однородные системы. Фундаментальные системы решений.
9. Неоднородные системы линейных уравнений.
10. Линейные системы с постоянными коэффициентами.
11. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
12. Задача Коши и начально-краевые задачи для волнового уравнения и методы их решения. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.)
13. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.)
14. Задача Коши и начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника и др.)
15. Нелинейные гиперболические уравнения. Основные свойства.
16. Элементы теории множеств. Отображения. Разбиение на классы. Эквивалентность множеств. Понятие мощности.
17. Задача построения меры. Определение меры Лебега. Внешняя и

- внутренняя мера ограниченного множества.
18. Определение и свойства измеримых функций. Сходимость по мере.
 19. Интеграл Лебега. Определение, свойства. Суммируемые функции.
 20. Метрические пространства. Непрерывность отображения в метрических пространствах.
 21. Сходимость в метрических пространствах. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах.
 22. Полные метрические пространства. Теорема Бэра.
 23. Принцип сжимающих отображений. Теорема Банаха и ее применение.
 24. Компактность метрических пространств. Теорема Арцела.
 25. Линейно нормированные пространства. Линейные операторы и функционалы.
 26. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Теорема Хана-Банаха.
 27. Евклидовы пространства. Ортогональные системы. Ортогонализация.
 28. Ряд Фурье в ортогональной системе. Сходимость ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Полные и замкнутые ортогональные системы. Равенство Парсеваля.
 29. Гильбертово пространство. Изоморфизм счетномерных и гильбертовых пространств.
 30. Подпространства. Ортогональные дополнения. Проекция векторов на пространство. Прямая сумма.
 31. Сопряженные пространства. Общий вид линейных функционалов в гильбертовом пространстве.
 32. Сопряженные и самосопряженные операторы. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора.

5. Шкала оценивания вступительного испытания

Баллы	Критерии оценивания ответа на вступительном испытании
5 баллов	<ul style="list-style-type: none"> - знание и понимание основных проблем соответствующей отрасли науки и научной специальности; - свободное владение понятийным аппаратом, научным языком и терминологией; - основные вопросы раскрыты полно и глубоко, с использованием дополнительного материала; - материал изложен последовательно и логически; - выделены существенные и вариативные признаки раскрываемых понятий, теоретические знания соотнесены с примерами из практики; - высказана своя точка зрения при анализе конкретной проблемы в исторической ретроспективе; - отсутствуют фактические и логические ошибки; - выводы и обобщения достаточно аргументированы

4 балла	<ul style="list-style-type: none"> - знание базовых положений в области науки в пределах основной образовательной программы без использования дополнительного материала; - основные вопросы раскрыты недостаточно полно и глубоко; - при соотнесении теоретических знаний с практикой есть затруднения в приведении адекватных примеров; - логичность и доказательность изложения материала, но допущены отдельные неточности при использовании ключевых понятий; - в ответах на дополнительные вопросы допущены незначительные ошибки; - выводы и обобщения аргументированы, но содержат отдельные неточности.
3 балла	<ul style="list-style-type: none"> - фрагментарные, поверхностные знания, в изложении программного материала выявлены существенные пробелы; - основные положения раскрыты поверхностно, отсутствует знание специальной терминологии; - материал недостаточно систематизирован; - испытывает трудности с теоретическим обоснованием приводимых примеров; - отсутствует собственная критическая оценка возможностей использования наследия прошлого для решения современных проблем; - недостаточно аргументированы выводы, имеются смысловые и речевые ошибки.
2 балла	<ul style="list-style-type: none"> - отсутствует знание специальной терминологии, незнание ключевых понятий в области науки; -обсуждаемая проблема не проанализирована; - отсутствует логика и последовательность изложения; - имеются фактические, смысловые и речевые ошибки; - приводит примеры из личного опыта без теоретического обоснования; - не отвечает на дополнительные вопросы по темам курса; - не может сформулировать собственную точку зрения по обсуждаемому вопросу.

6. Рекомендованная литература

Основная

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Изд-во URSS, 2019.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Изд-во URSS, 2019.
3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 2010.

4. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 2011.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2012.
6. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 2013.
7. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МЦНМО, 2010.
8. Степучев В. Г. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Изд-во «Лань», 2021.

Дополнительная

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МЦНМО, 2018.
2. Формалев В.Ф. Уравнения математической физики. М.: Изд-во URSS, 2021.
3. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. М.: Изд-во URSS, 2021.
4. Корзюк В.И. Уравнения математической физики. М.: Изд-во URSS, 2021.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Изд-во URSS, 2017.
6. Хинчин А.Я. Краткий курс математического анализа. М.: Изд-во URSS, 2021.
7. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. 1. М.: Изд-во МЦНМО, 2022.
8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. 2. М.: Изд-во МЦНМО, 2021.
9. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Часть 1, 2. М.: изд-во Лань, 2022.

7. Интернет-ресурсы

1. <http://www.mathnet.ru/>
2. <https://elibrary.ru/>